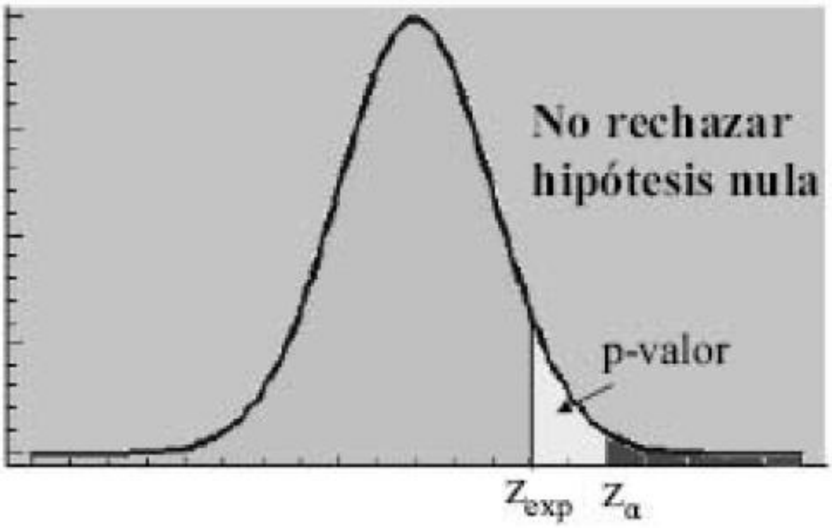
VALOR DE CONTRASTE P

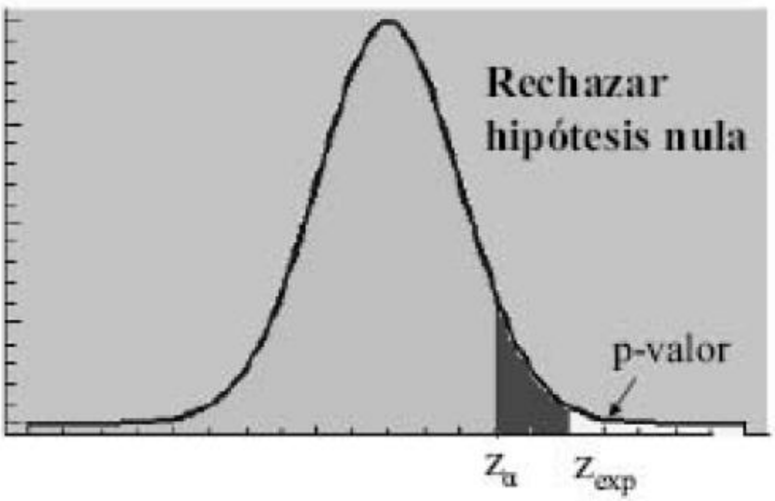
El concepto de p-valor Cuando se realiza un contraste de hipótesis sabemos que a partir del nivel de significación delimitamos la zona de aceptación y de rechazo. En ocasiones es muy interesante calcular el nivel de significación a partir del cual la hipótesis nula, H0, se va a rechazar. Esta es la idea o concepto del p-valor, es decir:

El p-valor puede considerarse como el valor límite para que un contraste sea significativo, es decir, elegido un nivel de significación α, se rechazará H0 si p ≤ α.

$$\text{Si } \alpha < \text{p-valor} \Rightarrow \text{No rechazar } H_0$$



$$\text{Si } \alpha \geq \text{p - valor} \Rightarrow \text{Rechazar } H_0$$



Llamaremos potencia del contraste a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta falsa. Fijémonos que, a mayor potencia, mejor contraste, puesto que podremos aceptar la hipótesis alternativa con poca probabilidad de que sea falsa.

Errores en los contrates de hipótesis

Cuando se realiza un contraste de hipótesis, siempre debemos tener en cuenta que cuando aceptamos o rechazamos una hipótesis puede que estemos cometiendo un cierto error. Cuando Rechazamos Ho, significa que Ho es falsa y cuando aceptamos Ho, significa que Ho es verdadera. Por tanto, se pueden considerar, dos tipos de errores que se pueden cometer cuando se realiza un contraste: - Error tipo I (α): Es el error que se comete en la decisión del contraste cuando se rechaza la hipótesis nula (Ho), siendo correcta (cierta). - Error tipo II (β): Es el error que se comete en la decisión del contraste cuando se acepta la hipótesis nula (Ho), siendo falsa.

Inferencia, estimación y contraste de hipótesis

En la siguiente tabla se puede ver de forma más concreta:

	Verdadera	**Falsa**
Acertar	$(1-\alpha)$ Decisión correcta	β Error tipo II
Rechazar	α Error tipo I	$(1-\beta)$ Decisión Correcta

Notamos otra vez que α, β, y el tamaño muestral n están interrelacionados, de forma que si hacemos disminuir cualquiera de ellos alguno de los dos restantes habrá de aumentar. Así, p.e., si queremos tomar un α menor deberemos aceptar que aumente β o bien incrementar el tamaño de la muestra n.

Finalmente, llamaremos estadístico de contraste a una v.a. calculada a partir de las observaciones muestrales, la cual se usa conjuntamente con un criterio de decisión (establecido a priori) para determinar si hemos de descartar o no la hipótesis nula.

Uso del p-valor en los contrastes sobre μ con σ conocida

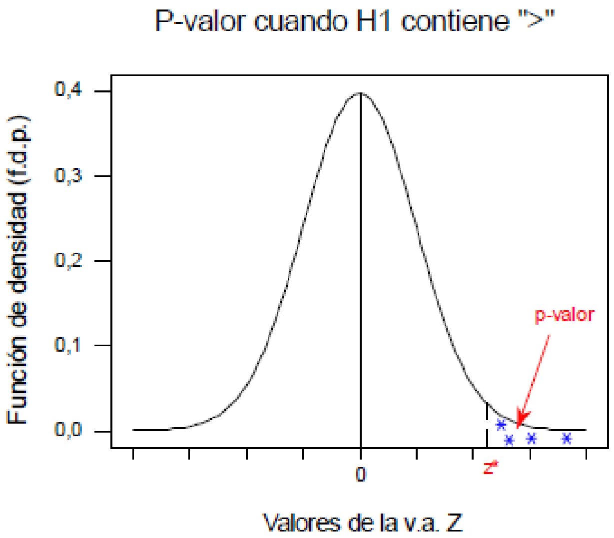
Dada una población X (que sigue una distribución cualquiera), con media μ (desconocida) y desviación estándar σ conocida, se trata de contrastar alguno de los tres tests siguientes:

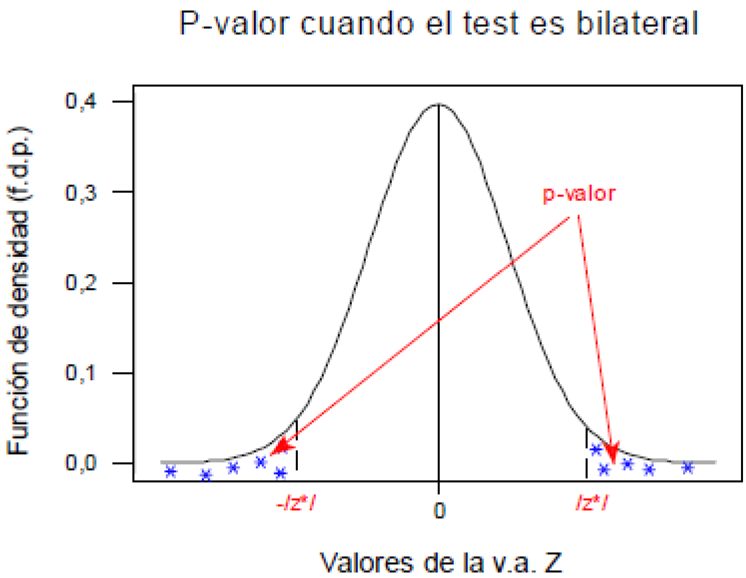
$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

- Si H_1 contiene " > " $\Rightarrow$ *p-valor* = $P(Z>z^*)$

- Si H_1 contiene " < " $\Rightarrow$ *p-valor* = $P(Z<z^*)$

- Si H_1 contiene " ≠ " $\Rightarrow$ *p-valor* = $P(Z< -|z^*|$ ó $Z>|z^*|) = 2\ P(Z< |z^*|)$





El p-valor nos proporciona el grado de credibilidad de la hipótesis nula: si el valor de p fuese "muy pequeño" (inferior a 0,001), significaría que la hipótesis nula es del todo increíble (en base a las observaciones obtenidas), y por tanto la descartaríamos; si el valor de p oscilase entre 0,05 y 0,001 significaría que hay fuertes evidencias en contra de la hipótesis nula, por lo que la rechazaríamos o no en función del valor que hubiésemos asignado (a priori) a α. Finalmente, si el valor de p es "grande" (superior a 0,05), no habría motivos suficientes como para descartar la hipótesis nula, por lo que la tomaríamos como cierta.

Criterio de decisión: Descartaremos H_0 si **p-valor** $\leq \alpha$ (normalmente $\alpha = 0{,}05$).
En caso contrario aceptaremos H_0 (p-valor $> \alpha$)

Ejemplo utilizando la tabla de la normal. Un banco quiere analizar si las comisiones que cobra a sus clientes por operaciones en el mercado bursátil difieren significativamente de las que cobra la competencia, cuya media es de 12 euros mensuales con una desviación estándar de 4,3 euros. Este banco toma una muestra de 64 operaciones bursátiles y observa que la comisión promedio es de 13,6 euros. Contrastar, al nivel de significación del 5%, que este banco no difiere significativamente en el cobro de las comisiones por operaciones en la Bolsa con respecto a la competencia. Sea X = "Comisiones que se cobran por operaciones en el mercado bursátil" Tenemos: X ≈ (μ, 4,3)

$$H_0 : \mu = 12$$
$$H_1 : \mu \neq 12$$

Es decir, queremos contrastar si μ es 12 euros como la competencia o si por el contrario es distinto de esta cantidad. Calculamos el estadístico de contraste,

Como es un contraste de dos extremos, ahora tenemos que calcular el p-valor correspondiente a z*=2,98, es decir el área que hay por debajo de z=-2,98 más el área que hay por encima de z= 2,98, i.e., el área en las dos colas. Si observamos la tabla de la distribución normal estándar, podemos comprobar que el área que hay a la izquierda de z=-2,98 es 0,0014 y el área que hay a la derecha de 2,98 es también 1- 0,9986=0,0014 por lo que el p-valor= 2*0,0014=0,0028 Como el p-valor es menor que el nivel de significación, rechazaremos la hipótesis nula a un nivel de significación del 5%. Por lo tanto existe evidencia estadística de que la comisión promedio que cobra este banco difiere significativamente de la competencia.

Ejemplo utilizando la tabla de la t-student La directora del departamento de personal de una importante corporación está reclutando un gran número de empleados para un puesto en el extranjero. Durante el proceso de selección, la administración le pregunta cómo van las cosas, y ella responde que cree que la puntuación promedio en la prueba de aptitudes será de aproximadamente 90 puntos. Cuando la administración revisa 19 de los resultados de la prueba compilados, encuentra que la puntuación media es 83,24 y la desviación estándar de esta puntuación es 11. Si la administración desea probar la hipótesis : 90 H0 μ = vs : μ ≠ 90 Ha al nivel de significación del 10%, ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste y su p-valor? : 90 H0 μ = : μ ≠ 90 Ha Suponemos que la población de resultados de todos los candidatos sigue una distribución normal . X ≈ N(μ;σ) y entonces la distribución muestral de cada media muestral de cada muestra de cada población seguirá también una normal :

Si calculamos el estadístico t de contraste nos queda: -2.6747

Como los grados de libertad son 18, entonces como tenemos un contraste de dos colas, es decir en la hipótesis alternativa aparece el distinto, es decir : 90 H0 μ = : 90 H1 μ ≠ ; entonces el p-valor de t = -2,6747 será la probabilidad de estar por encima de 2,6747 más la probabilidad de estar por debajo de t =-2,6747. Cuando no aparece en la tabla de la t-student el valor exacto del estadístico del cual se quiere calcular su p-valor, se toma como referencia el valor más cercano, en este caso t=-2,5524. Por tanto el p-valor = P(t>2,5524)+P(t<-2,5524)=0,01+0,01=2*0,01=0,02, porque a la derecha de 2,5524 hay la misma probabilidad que a la izquierda de -2,5524 Así que el p-valor de t=-2,6747 será menor a 0,02 porque a mayor valor del estadístico menor área por encima como se puede ver en la tabla. Cuando los grados de libertad no aparezcan en la tabla de la t-student, se toma los grados de libertad más cercanos al cual se quiere tener en cuenta. Si el contraste hubiese sido de una cola, bien por la derecha o bien por la izquierda, H1 : μ > 90 ó H1 : μ < 90 , entonces el p–valor del estadístico (supongamos que el estadístico es t = 2,6747) si el contraste es de cola derecha, es decir (mayor que), sería la probabilidad de estar por encima de t = 2,5524 que sería 0,01, por lo que el p-valor de t= 2,6747 sería menor que 0,01. Si es por la cola izquierda (es decir menor que), el p-valor del estadístico (supongamos que el estadístico vale t= -2,6747) sería la probabilidad de estar por debajo de t = -2,5524 que sería 0,01, por lo que el p-valor de t= - 2,6747 sería menor que 0,01