TEMA 9 MODELOS ESTADISTICOS Y POBABILIDAD. LA CURVA NORMAL DE PROBABILIDAD

9.1.PRESENTACION

9.2 INTRODUCCION

9.3 MODELO

Resumiendo un modelo es una representacion de la realidad, puede ser representada de forma muy diferentes como con las matemáticas, con fórmulas e igualdades o analogias. (representaciones graficas), nos acercamos a comprender una realidad, o simplemente observarlo. A de ser una realidad simplificada. Y siempre que el modelo sea bueno (represente con exactitud), las bases de este (cualidades de este) se pueden aplicar a la realidad (Ej: hago un modelo matemático sobre las formas cuadrangulares, que muestra que su area es la base por la altura, y asi cuando veamos un cuadrado le aplicaremos las características de un cuadrado, y podremos hallar el area.

En las ciencias sociales creamos modelos por ejemplo sobre las mujeres maltratadas y asi cuando veamos una mujer con golpes, baja autoestima, miedo… podremos aplicarle el modelo de las mujeres maltratadas y por tanto las soluciones creadas para ellas.) es muy habitual que hablemos de escalas que no son más que modelos.

9.3.1 UTILIDAD DE LOS MODELOS

Lo más útil de los modelos es que os permiten anticiparnos a los hechos, aunque esto es más fácil para las realidades físicas que los humanos (los humanos somos impredecibles). Por tanto si ciertos hechos humanos son predecibles por los modelos, ha de ser moderados por la probabilidad que nos permite acertar algo con bastante precision.

9.3.2. MODELOS MATEMATICOS Y MODELOS ESTADISTICOS

Un modelo estadistico es un modelo matemático en que hay probabilidad (porque trata de personas). La campana de Gauss tiene un modelo matemático por ejemplo que se basa en una fórmula

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

por supuesto no hay que saberla porque es demasiado complicada de aplicar.

Toda predicción asume cierto riesgo de error , error considerado aleatorio y normalmente intentamos compensar ese error. Ya que sabiendo cual es el posible error se le añade a la igualdad, vamos que como hay errores en cualquier fórmula para saber predecir bien debes contar con ellos y añadirlos a tus cálculos. Pensemos en una bascula, sabemos que muestra pesos pero no de manera exacta , porque está un poco desnivelada. Para empezar tendríamos que saber cuanto pesa mal la báscula pesa doscientos gramos menos, dos kilos menos, lo que sea y luego cuando pesemos algo con ella sumarle al resultado los dos kilos o doscientos gramos que pesa mal. Y asi sabremos de verdad cuanto pesará la persona. Pues algo parecido ocurre con la predicción estadística tendremos que saber cual es el error habitual y al resultado de la predicción sumarselo o restarselo.

9.4. Probabilidad

Determinista es un resultado cierto vamos que despues del día va la noche, que cuando llueve te mojas…

Estocástico , es lo que tiene un comportamento no determinista, o sea que puede pasar de una manera u otra, por ejemplo los dado cuando tiro un dado me puede salir un 1,un2, un3, un 4 , un5 ,un 6 (cualquiera de estos resultados no sabemos cual, no esta determinado de antemano que vaya a salir un número en concreto. O el tirar una moneda puede salir cara o cruz pero antes de tirarla no sabremos cual va a salir es una incógnita y esto es estocástico.

9.4.1. Estadistica

Es la ciencia que recoge , analiza e interpreta un conjunto de datos numéricos que se refieren a un conjunto de sujetos . Y como ciencia es considerada un saber matemático. Podemos extraer conocimientos de los fenómenos aleatorios porque los acontecimientos causales (que a una causa le sigue un efecto), ocurren según leyes con regularidad (que de vez en cuando pasa lo mismo).

9.4.2 La probabilidad

A las realidades deterministas (los de la física) no se les aplica la probabilidad porque es seguro que pasaran. Los hechos humanos son aleatorios (puede ocurrir de una forma o de otra). Lo único que podemos hacer es estimar (acercarnos), a las probabilidades de que ocurra o no algo (aunque no lo sabremos cierto porque interviene el azar)

9.4.2.1. Probabilidad a priori y a posteriori

La probabilidad a priori se establece sobre la base de cosas favorables entre las cosas posibles . Muchas veces no sabemos claro cuales serían estas posibilidades a priori (antes de que ocurran) pero una vez ocurridas si las conoceremos a posteriori.

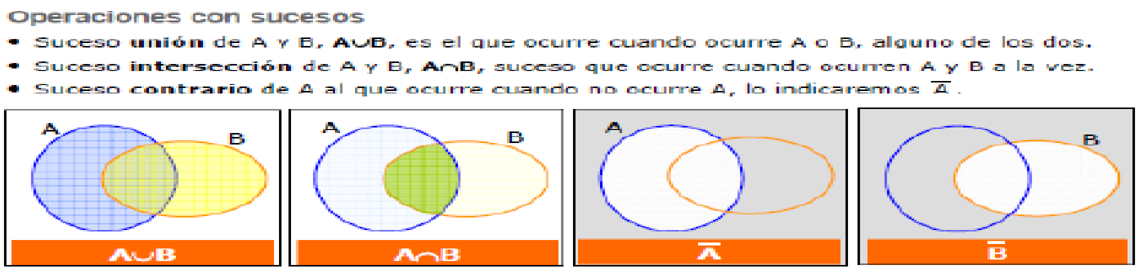
9.4.3. Cálculo de probabilidad

Hay una serie de conceptos a conocer.

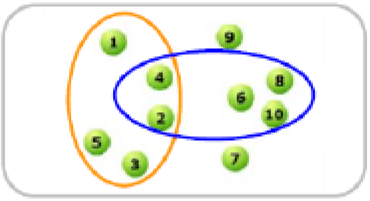
Espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un fenómeno . Se establece con árboles o diagramas que muestran todas las posibilidades. Vamos el espacio muestral E es igual a la probabilidad de A y la probabilidad de B . El espacio muestral de dos boletos de loteria es, la posibilidad de que toque un boleto y la probabilidad de que toque otro se representa asi ($A \cup B$) este símbolo $\cup$ significa unión y entonces ($A \cup B$)= $P(A)+P(B)$.

Pero muchas veces los dos grupos tienen elementos en común . Ej. Gente tiene gato y gente que tiene perro hay gente que puede tener gato y perro. Estos sucesos en comun son llamados intersección y se escriben asi $\cap$, seria $A \cap B$ ya que pertenecen a ambos.

Entonces para representar al grupo con puntos en común no pondriamos $A \cup B$, porque entonces pondriamos dos veces lo que tienen en comun deberiamos poner $A \cap B$ porque asi no se repitirán lo que tienen en común . Con estos ejemplos lo entendereis mejor



Experimento aleatorio: *Extraer una bola y anotar el número.*



A="*salir menor que 6*" B="*salir par*"

A={1, 2, 3, 4, 5} $\overline{A}$ ={2, 4, 6}

B={2, 4, 6, 8, 10} $\overline{B}$ ={1, 2, 3}

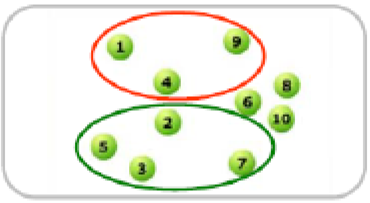
A∪B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}

A∩B={2,4}

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral E, llamaremos:

- Suceso **contrario** de A al que ocurre cuando no ocurre A, lo indicaremos $\overline{A}$.
  Lo forman los sucesos elementales que no están en A.
- Suceso **unión** de A y B, **A∪B**, es el que ocurre cuando ocurre **A o B**, al menos uno de los dos.
  Se forma juntando los sucesos elementales de A y B.
- Suceso **intersección** de A y B, **A∩B** al **suceso** que ocurre cuando ocurren **A y B** a la vez.
  Se forma con los sucesos elementales comunes .

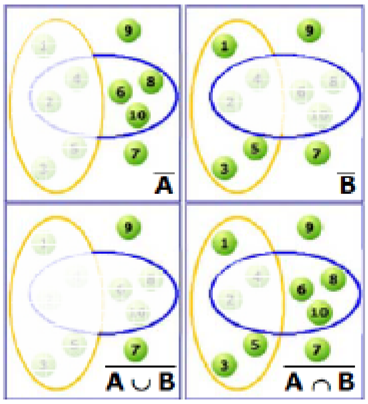


C="*salir cuadrado perfecto*"
D="*salir nº primo*"
A y B incompatibles

Cuando la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, es decir que no pueden ocurrir simultáneamente nunca, se dice que ambos son **incompatibles.**

A y B **incompatibles** si **A∩B=Ø**

Atención: No hay que confundir los sucesos contrarios y los sucesos incompatibles; un suceso y su contrario siempre son incompatibles, no pueden ocurrir a la vez, pero dos sucesos incompatibles no tienen por qué ser contrarios.



$\overline{A}$ = {6, 7, 8, 9, 10} $\overline{B}$ = {1, 3, 5, 7, 9}

$\overline{A} \cap \overline{B}$ = {7, 9} = $\overline{A \cup B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ = {1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10} = $\overline{A \cap B}$

Propiedades de las operaciones con sucesos

La unión e intersección de sucesos y el suceso contrario cumplen:

- La unión de un suceso y su contrario es el suceso seguro; la intersección es el suceso imposible.

  $$A \cup \overline{A} = E \quad A \cap \overline{A} = Ø$$

- El contrario de $\overline{A}$ es A
- El contrario de la unión es la intersección de los contrarios.

  $$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- El contrario de la intersección es la unión de los contrarios.

  $$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- <u>Exahustividad o agotamiento</u> es cuando los subconjuntos ocupa todo el espacio muestra. , por eso la posibilidad es 1, porque seguro que sacas una , piensa en una rifa si entre mi madre y uo compramos todas las papeletas, fijo que nos toca y se representa en fracciones y si tienes 5/5 cinco papeletas de cinco que tiene la rifa 5:5 =1.
- <u>Mutua exclusión,</u> dos acontecimientos son mutuamente excluyentes. Son dos sucesos incompatibles. E. estudiar y dormir, podemos calcular la probabilidad de encontrar a alguien estudiando y a alguien durmiendo pero no puede hacer las dos cosas a la vez. Se representa A∩B=Ø

Como son independientes (no tienen nada que ver el uno con el otro) la posibilidad, probabilidad, de que ocurra es la multiplicación de ambas posibilidades. Ej: si hay una posibilidad de 8/24 de encontrar a alguien durmiendo porque duerme 8 horas de las 24horas del dia y una posibilidad de 2/24 de encontrar a alguien estudiando. Entonces la posibilidad de encontrar a alguien durmiendo o estudiando es 8/24x2/24.

$P(A \cap B) = P(A) x P(B)$.

<u>Probabilidad condicional ,</u> hay acontecimientos a diferencia del anterior que estan condicionadas no son independientes. Ej La probabilidad de obtener un seis al tirar un dado , si sabes que el resultado de la tirada es por serie 1/6 hay 1 posibilidad de que salga un 6 de 6 opciones. Y hay tres pares entonces sera 3/6 de que sea par.

Y tendriamos entonces que dividir la posibilidad de que salga uno entre la que salga el otro.

O sea $P(B/A)= P(A \cap B)/P(A)$

$P(B/A)= 1/6:3/6=1/3$

9.4.3.1 EL CASO DE LAS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS Y DISCRETAS

Recordemos por decima vez

Cuantitativa continua numeros con comas 12.3 2.3….

Cuantitativa discreta numeros enteros 3,4,5,6,

Cuando la variable es aleatoria continua deberiamos utilizar un número infinito. Las representaciones gráficas tendrian determinadas cualidades que nos permitirán conocer, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución.

La representación gráfica nos permite encontrar valores de la probabilidad: la función de densidad de la probabilidad y la de distribución, que tienen estas características.

El area ocupada por cada dibujo barra vale como una unidad

Siempre seran valores positivos

En los histograms de barras el eje por representa una variable aleatoria discreta.

Si el histograma no tiene barras solo puntos unidos con curvas es una variable continua. Si es discreta el area entre dos valores A y B es la proporcion . Para las continuas es la probabilidad.

9.5Algunas funcione de densidad de probabilidad

9.5.1 Funcion de densidad de probabilidad normal.

La funcion de densidad (forma de encontrar la probabilidad) mas utilizada es la normal o campana de Gauss . Según el valor de la desviación típica tendrá un porcentaje asociado.

$\pm 1\sigma$ =68%

$\pm 2\sigma$=95%

±4,5=99,99932%

Esto ya lo hemos visto . Y estos valores en % se convierten en probabilidad si los dividimos entre 100 (siempre la probabilidad se representa con decimales)

En tonos por medio de la tabla que tiene encima el dibujo de las campanas de Gauss y que se llama tabla de area de curva normal encontraremos la probabilidad)

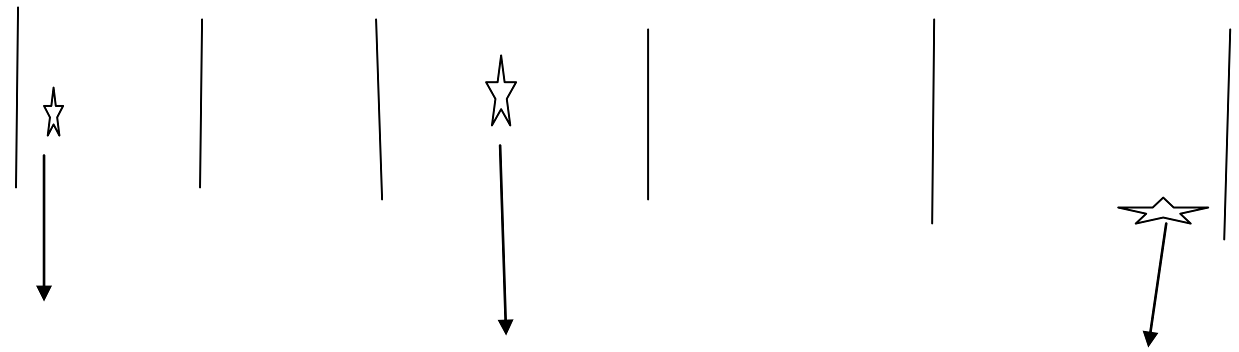
9.5.2 Funcion de densidad de probabilidad X^2 (chi cuadrado)

Si os acordais en el coeficiente de contingencia c del tema 7 aprendimos ha hacer el chi o jhi cuadrado, y ahora lo podemos utilizar también para saber la probabilidad, utilizando también el grado de libertad g.l. (algo nuevo), también se representa como ν, y se halla con n-1 , n es el número de casos y 1 (es un número) porque los primeros casos pueden variar, libremente los últimos depende de los anteriores. Según aumenta el número de los grados de libertad X^2 (chi cuadrado) se acerca a la vez a la distribución normal. La tabla de x^2 nos ofrece valores hasta 30g.l. a partir de ahi X^2 se distribuye con un valor

$Z=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2.g.l.-1}$

Esto es muy difícil de entender por eso aunque sea un poco largo lo explicare . Al hacer un estudio científico , tenemos en mente un modelo teórico ideal que es como debería ser un comportamiento y cuales serán los resultados esperados . Pero a la hora de la verdad en el mundo real los resultados no coinciden con la teoría . Puede haber de hecho muchas diferencias, esto todos lo sabemos, pero esto no sirve a un científico que intentará encontrar la fórmula para calcular estas fluctuaciones (cambios) y saber si eran demasiado grandes y la teoría se caía o no eran tan graves y se validaba la teoria. Para ver esto se creo el test chi cuadrado, pero más tarde otros estudiosos encontrarían otras formas como la t de Studen que vimos antes y que se usan más.

Para entender el porque sirve tendre que hablar de que es el chi cuadrado. Se utiliza sobre todo para variables continuas, y busca establecer un espacio continuo (enteros nº) delimitado por la suma de los cuadrados de n variables aleatorias independientes entre si , vamos nos da un espacio entre dos puntos que son todas las opcione que tiene la variable para estar. Esto limites puntos entre los que esta por estar este punto, en el intervalo , dependiendo del grado de libertad.



Puede estar aqui o puede estar aqui o puede estar aqui

Todos estos puntos son validos siempre y cuando esten dentro del intervalo , lo que nos permite el grado de libertad.

Y a estar en un punto al principio o al final de estos limites tiene una probabilidad entre 1 y 0 para la variable. Ya que la variable tenia un grado de libertad para ponerse en uno u otro sitio y eso afecta a la probabilidad. Entonces la distribucion chi cuadrado permite calcular la probavilidd de que el punto de una variable que tiene un determinado grado de libertad, permanezca dentro de unos límites ideales previstos para el punto cuando tiene ese grado de libertad concreto. A la vez que nos puede ayudar a encontrar el coeficiente de contingencia que miraba la relacion entre dos variables .

Con todo este rollo que os he metido espero que entendais mejor la fórmula

$Z=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2g.l.-1}$

Donde g.l. es el grado de libertad.

x^2 chi cuadrado

z= desviacion tipica el punto que esta entre un lugar o otro del grado de libertad que en la tabla nos ayudo es encontrar una probabilidad.

9.5.3. Función de densidad de probabilidad t

En 1908 W. S.Gosset inventó esta distribución de probabilidad t conocida como t Sudent. Se utiliza para dos variables independientes, en la que Y tiene una distribución chi cuadrado con n grados de libertad y z con una distribución normal estandar 0,1, entonces la distribución de la variable

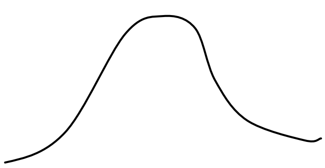
T= z/(√Y/v)

Donde z e y = dos variables.

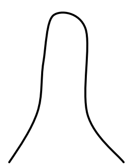
Cuando el g.l. (grado de libertad aumenta , la distribución se aproxima porgresivamente a la campana de Gauss. Esta distribución se utiliza para contrastar hipótesis para decidir si la diferencia de medias x es o no significativo en un determinado valor de confianza.

Cuando las muestra son correlacionadas la distribucion t no sigue el estadístico de constraste aplicado en las muestra independientes. Dos muestra son correlacionadas cuando hay un par de sujetos uno de cada muestra que tienen características comunes o parecidas.

En resumen es otra forma de calcular la distribución de probabilidad , es parecida a la normal pero en esta se tiene en cuenta la media y no la variazna (lo normal) Y se suele usar mas en las muestra pequeñas. La distribución t es igual que la de guass paro mas estrecha



Guass



t de student

9.5.4. Función de densidad de probabilidad F

Es uno más de los cálculos utilizados junto a t, para comprobar si se cumple la hipótesis nula y también mide la diferencia que hay entre las medias. Que se pueda aplicar para tres o más partes grupos . En ella se utiliza el chi cuadrado y los grados de libertad. Se aplica fundamentalmente en el análisis de varianza ANAVA (es una prueba que nos permite contrastar la hipótesis nula que las medias de distintas poblaciones coinciden. Y no es mas que t^2. Como solo dice si hay o no hay diferencias entre medias , esta diferencia cuanto es de diferente lo tendemos a adivinar con otras pruebas despues.

El analisis de varianza Anova de un factor sirve para comparar varios grupos en una variable quantitativa. Se trata , por tanto de una generalización de la prueba T para dos muestra independientes para diseños con más de dos muestra.

A la variable categorica (nominal u ordinal) que caracteriza a los grupos a comparar serán la variable independiente y la dependiente. Sirve por ejemplo para averiguar cual de tres programas dististintos de incentivos aumenta de forma más eficaz el rendimento de un determinado grupo de alumnos. Podemos seleccionar tres muestras aleatorias de ese grupo y aplicar a cada una de ellas uno de los tres programas. Despues medimos el rendimento de cada grupo y averiguaremos si existe o no diferencias entre ellos. Por tanto nos permite concluir si los sujetos sometidos a distintos programas difieren la medida de rendimento utilizada.

Pero volviendo a la densidad de la probabilidad F la formula es

$$\boxed{F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}}$$

Y si dos varianzas poblacionales son iguales, la fómula se reduce a

$$\boxed{F = \frac{s_1^2}{s_2^2}}$$

Siempre dara valores positivos, es asintótica. Su tabla nos da valores de probabilidad que corresponde a diversos valores de g.l. del numerador y del denominador. Hay muchas mas pruebas pero son para casos raros.

9.6. La curca normal de probabilidades.

La campana de Gauss es la curva normal de probabilidades .Al poner los datos de una variable en un gráfico si se parece mucho a una campana de Gauss entonces se le pueden aplicar sus características. Como en matemática esta comparación no se hace a ojo tendremos que hacer la prueba de bondad de ajuste (esta prueba se verá en un par de puntos más adelante.

9.6.1.El modelo

Con la campana de Gauss nos da una tabla para que para cada puntuación tipificada z nos muestra:

- El valor de las ordenadas y
- El area desde la media a la puntuacion tipificada z
- El area de la parte mayor si za son valores más grandes que la media
- El area de la parte menor si z es mas pequeña que la media

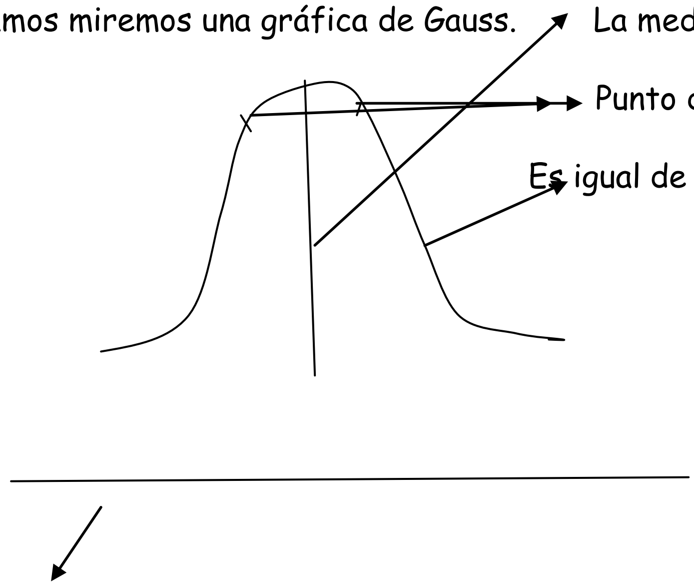
Las curvas normales o campana de Gauss siempre:

- El valor máximo de la ordenada corresponde a la media y es la puntuacion típica 0
- Hay dos puntos de inflexión , a ambos lados de la media que corresponde a ±1 de z . La curva es simétrica vértice la media
- La media la Me y la Mo son = y tienen un 50% de los casos.
- Es asintótica nunca corta el eje de abscisas.

Vamos miremos una gráfica de Gauss. La media la mediana y la moda

Punto de inflexión ±1

Es igual de un lado a otro o al menos lo seria si supiese dibujar



Nunca corta x

Con la tabla a un % tenemos una puntuación típica

9.6.2 Prueba de bondad de ajuste

Dijimos que para ver si a un caso le podriamos aplicar la campana de Gaus necesitabamos tocar la prueba de bondad de ajuste y ahora veremos , tenemos muchas diferentes nosotros conocemos ya una la de chi cuadrado

$$\boxed{\chi^2 = \sum \left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\right]}$$

Para ello debemos ir a la tabla de la curva normal y mirar la probabilidad que viene a valores = o menores, miramos las puntuaciones típicas de cada límite , para ello necesitamos la media aritmética y la desviación típica, sabiendo la probabilidad que corresponde a este punto y saber la probabilidad de cada intervalo restandole a la probabilidad de un intervalo el del anterior. Asi sabremos la frecuencia esperada que sera la probabilidd d de cada intervalo por N.

Si el chi cuadrado con todos estos datos es más pequeño que el valor de la tabla acepto Ho no hay diferencias signigicativas. Si chi cuadrado es mayor que el valor de la tabla no hay ajuste